Année universitaire 2019-2020

Prof. : A. RAFIKI

Filière : SMP S2; TD Électrostatique
série n°2

Exercice 1

Soit un arc de cercle, de centre $\boldsymbol{O}$, de rayon $\boldsymbol{r}$, vu du point $\boldsymbol{O}$ sous un angle $\boldsymbol{2\alpha = 2\frac{\pi}{3}}$ et chargé uniformément avec une densité linéique $\boldsymbol{\lambda > 0}$.

Déterminer le champ et le potentiel au point $\boldsymbol{O}$.

Exercice 5 : Examen de rattrapage 2018-2019

Soient $\boldsymbol{q_1}$, $\boldsymbol{q_2}$ et $\boldsymbol{q_3}$ trois charges ponctuelles placées respectivement aux points $\boldsymbol{M_1(x_1, y_1, z_1)}$, $\boldsymbol{M_2(x_2, y_2, z_2)}$ et $\boldsymbol{M_3(x_3, y_3, z_3)}$ située à l'intérieur d'une surface fermée $\boldsymbol{S}$.

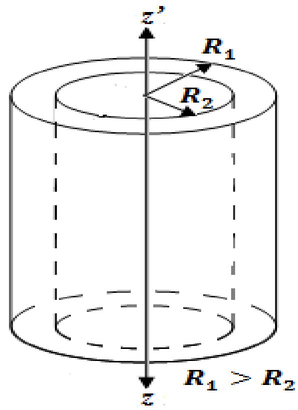
1) Donner sans démonstration l'expression du flux du champ électrostatique sortant de la surface $\boldsymbol{S}$?

2) On permute les positions des charges $\boldsymbol{q_1}$ et $\boldsymbol{q_2}$. Donner l'expression du flux du champ électrostatique sortant de la surface $\boldsymbol{S}$? Conclure ?

3) On place une charge ponctuelle $\boldsymbol{q_4}$ au point $\boldsymbol{M_4(x_4, y_4, z_4)}$ à l'extérieur de la surface $\boldsymbol{S}$. Donner l'expression du flux du champ électrostatique sortant de la surface $\boldsymbol{S}$? Conclure ?

Exercice 3 : Examen normale 2017-2018

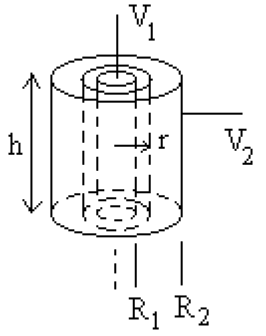
On considère un faisceau de particules chargées, réparties uniformément avec une densité volumique de charge $\boldsymbol{\rho}$, entre deux cylindres coaxiaux d'axe ***(z'z)*** et de rayon $\boldsymbol{R_1}$ et $\boldsymbol{R_2}$, où $\boldsymbol{R_1 > R_2}$.



1) Calculer le champ électrique ***E(r)*** en un point $\boldsymbol{M}$ à la distance $\boldsymbol{r}$ de l'axe ***(z'z)***, $\boldsymbol{r}$ variant de **0** à l'infini.
2) Calculer le potentiel ***V(r)*** en $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{0} < r < \infty)$. On prendra égal à zéro le potentiel en un point ***O*** de l'axe ***(z'z)***.
3) Tracer la courbe visualisant les variations:
   a. De ***E(r)*** en fonction de $\boldsymbol{r}$.
   b. De ***V(r)*** en fonction de $\boldsymbol{r}$.
4) En déduire, par deux méthodes, l'expression du champ créé en un point $\boldsymbol{M}$ par:
   a) Un tube cylindrique, de rayon $\boldsymbol{R_2}$, uniformément électrisé avec une densité surfacique $\boldsymbol{\sigma}$.
   b) Un conducteur filiforme indéfini, uniformément électrisé avec une densité linéaire $\boldsymbol{\lambda}$.

Exercice 4 : Examen rattrapage 2017-2018

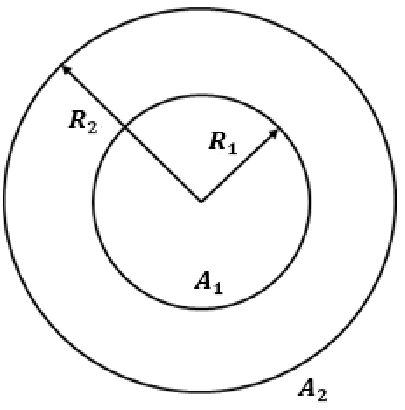
On considère un condensateur cylindrique dont les armatures sont constituées par deux cylindres coaxiaux de rayon R_1 et R_2, où $R_1 < R_2$.



1) Déterminer le champ électrique $E(r)$ créé en un point M situé entre les deux armatures.
2) Calculer la circulation du champ électrostatique entre deux points appartiennent aux armatures.
3) Déduire la capacité du condensateur.

Exercice 5 : Examen rattrapage 2018-2019

Un condensateur sphérique est constitué de deux sphères conductrices concentriques de même centre et de rayons respectifs $\boldsymbol{R_1}$ et $\boldsymbol{R_2}$. Les charges respectives des armatures $\boldsymbol{A_1}$ et $\boldsymbol{A_2}$ sont $\boldsymbol{Q_1}$ et $\boldsymbol{Q_2}$ avec $\boldsymbol{Q_1 = -Q_2 = Q}$.



1) Déterminer le champ électrique $\boldsymbol{E(r)}$ créé en un point $\boldsymbol{M}$ situé entre les deux armatures ?
2) Calculer la circulation du champ électrostatique entre deux points appartient aux armatures ?
3) Déduire la capacité du condensateur ?

Exercice 6 : Examen normale 2018-2019

Soit une sphère de rayon $\boldsymbol{R}$ chargée d'une densité volumique $\boldsymbol{\rho}$ uniforme.

1) Calculer le champ créé par cette distribution de charges à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.
2) Déduire le potentiel à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère (on suppose que le potentiel est nul à l'infini).
3) Donner les allures du champ et du potentiel électrostatique.
4) Calculer l'énergie électrostatique de la sphère en utilisant la relation : $\boldsymbol{W = \frac{1}{2}\iiint \rho\, V\, d\tau}$.

Filière : SMP S2; TD Électrostatique
série n°2
<u>Correction</u>

<u>**NB :** La série N°1 et les exercices 1 et 2 de la série N°2 sont déjà corrigés</u>.

<u>**Corrigé de l'exercice 3 :**</u>

On a deux cylindres de rayon respectivement R_1 et R_2 et d'extension infinie. La meilleure base pour exprimer le champ électrostatique est la base cylindrique :

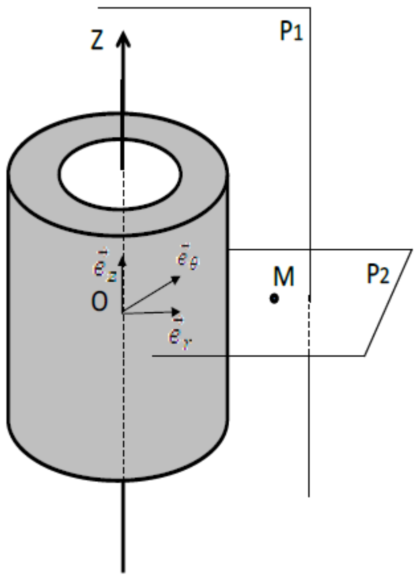
$$\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_r} + E_\theta(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\theta} + E_z(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_z}$$

a) La symétrie du système :

Le cylindre admet deux plans de symétrie :

P_1 Plan vertical contient (oz) $\vec{E}(M) \in P_1$

P_2 Plan horizontal perpendiculaire à l'axe (oz) $\vec{E}(M) \in P_2$



Conséquence : $\vec{E}(M) \in$ à l'intersection des deux plans d'où,

$$\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_r}$$

b) L'invariance du système :

Le système est invariant par translation parallèle à (oz), donc $\vec{E}(M)$ est indépendant de z.

Rotation autour de (oz) donc, $\vec{E}(M)$ indépendant à O.

Conséquence :

$$\vec{E}(M) = E(r)\overrightarrow{e_r}$$

1. Calcul du champ électrostatique

   D'après le théorème de Gauss :

$$\phi = \oiint_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Avec S est la surface fermée de Gauss : ici la surface S est un cylindre de rayon r est de hauteur h telle que :

$$S = S_{bi} + S_{bs} + S_L$$

c) S_{bi} : la surface de base inferieure du cylindre
d) S_{bs} : la surface de base supérieure du cylindre
e) S_L : la surface latérale du cylindre

Calcul du flux :

$$\oiint_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \iint_{S_{bi}} \vec{E}\,\overrightarrow{dS_{bi}} + \iint_{S_{bs}} \vec{E}\,\overrightarrow{dS_{bs}} + \iint_{S_L} \vec{E}\,\overrightarrow{dS_L}$$

Avec,

$$d\vec{S}_{bi} = dS_{bi}\overrightarrow{n_i} = -\,dS_{bi}\overrightarrow{e_z}$$

$$d\vec{S}_{bs} = dS_{bs}\overrightarrow{n_s} = dS_{bs}\overrightarrow{e_z}$$

$$d\vec{S}_L = dS_L\overrightarrow{n_l} = dS_{bi}\overrightarrow{e_r}$$

Or,

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\overrightarrow{e_r}$$

Donc, $\vec{E}d\vec{S}_{bi} = \vec{E}d\vec{S}_{bs} = 0$ car, $\overrightarrow{e_z} \perp \overrightarrow{e_r}$

$$\oiint_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \iint_{S_L} E dS_L = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Avec, $dS_L = r d\theta dz$

$$rE(r)\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Longrightarrow 2\pi h r E(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Alors,

$$E(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi h r \varepsilon_0}$$

Calculons la charge totale à l'intérieur de la surface de Gauss.

f) **Pour $\boldsymbol{r < R_2}$:** La charge à l'intérieure du cylindre de rayon R_2 est nulle (la charge est répartie entre les deux cylindres)

$$Q_{int} = 0$$

D'où

$$E_1(r) = 0$$

Pour $\boldsymbol{R_2} \leq r < \boldsymbol{R_1}$:

$$Q_{int} = \iiint dq \quad ou \quad dq = \rho d\tau$$

Puisque la répartition est uniforme : $\rho = cte$.

$$Q_{int} = \rho \iiint d\tau, \;\; avec \;\; d\tau = rdrd\theta dz$$

$$Q_{int} = \rho \iiint rdrd\theta dz = \rho \int_{R_2}^{r} rdr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{h} dz$$

$$Q_{int} = \rho 2\pi h \left[\frac{r^2}{2}\right]_{R_2}^{r} = \rho\pi h[r^2 - R_2^2]$$

$$Q_{int} = \rho\pi h[r^2 - R_2^2]$$

Or,

$$E(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi h r \varepsilon_0}$$

Donc,

$$E_2(r) = \frac{\rho\pi h[r^2 - R_2^2]}{2\pi h r \varepsilon_0} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[r - \frac{R_2^2}{r}\right]$$

$$E_2(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[r - \frac{R_2^2}{r}\right]$$

Pour $r \geq R_1$:

$$Q_{int} = 2\pi h\rho \int_{R_2}^{R_1} rdr$$

$$Q_{int} = \pi h\rho[R_1^2 - R_2^2]$$

$$E_3(r) = \frac{\pi h\rho[R_1^2 - R_2^2]}{2\pi h r \varepsilon_0} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[\frac{R_1^2 - R_2^2}{r}\right]$$

$$E_3(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[\frac{R_1^2 - R_2^2}{r}\right]$$

2. Calcul du potentiel

On a : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V \quad \Rightarrow \quad E(r)\overrightarrow{e_r} = -\frac{dV}{dr}\overrightarrow{e_r} \quad \Rightarrow \quad V(r) = -\int E(r)dr$

g) Pour $r < R_2$

On a,

$$E_1(r) = 0, \qquad Donc, \qquad V_1 = cte_1 = V_{01}$$

Pour déterminer la constante V_{01} on utilise la condition au limite telle que : Le potentiel est nul en tout point de l'axe (oz) c-à-d :

$$V_1(r = 0) = 0 \Longrightarrow V_{01} = 0$$

$$V_1(r) = 0$$

h) Pour $R_2 \leq r < R_1$:

$$E_2(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[r - \frac{R_2^2}{r}\right]$$

$$V_2(r) = -\int \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[r - \frac{R_2^2}{r}\right]dr = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{2} - R_2^2\ln(r)\right] + V_{02}$$

Pour déterminer la constante V_{02} on utilise la continuité du potentiel en $r = R_2$ telle que :

$$V_1(r = R_2) = V_2(r = R_2)$$

$$-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[\frac{R_2^2}{2} - R_2^2\ln(r)\right] + V_{02} = 0$$

$$V_{02} = \frac{\rho R_2^2}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2} - \ln(R_2)\right]$$

$$V_{02} = \frac{\rho R_2^2}{4\varepsilon_0}[1 - 2\ln(R_2)]$$

$$V_2(r) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{2} - R_2^2\ln(r)\right] + \frac{\rho R_2^2}{4\varepsilon_0}[1 - 2\ln(R_2)]$$

$$V_2(r) = -\frac{\rho R_2^2}{4\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{R_2^2} - 2\ln(r)\right] + \frac{\rho R_2^2}{4\varepsilon_0}[1 - 2\ln(R_2)]$$

$$V_2(r) = \frac{\rho R_2^2}{4\varepsilon_0}\left[1 + 2\ln(\frac{r}{R_2}) - \frac{r^2}{R_2^2}\right]$$

Pour $r \geq R_1$:

$$E_3(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[\frac{R_1^2 - R_2^2}{r}\right]$$

$$V_3(r) = -\int E_3(r)dr = -\int \frac{\rho}{2\varepsilon_0}[R_1^2 - R_2^2]\frac{dr}{r}$$

$$V_3(r) = \frac{-\rho}{2\varepsilon_0}[R_1^2 - R_2^2]\ln(r) + V_{03}$$

De même, la continuité en $r = R_1$ donne :

$$V_3(r = R_1) = V_2(r = R_1)$$

$$\frac{\rho}{2\varepsilon_0}[R_2^2 - R_1^2]\ln(R_1) + V_{03} = \frac{\rho R_2^2}{4\varepsilon_0}\left[1 + 2\ln(\frac{R_1}{R_2}) - \frac{R_1^2}{R_2^2}\right]$$

$$V_{03} = \frac{\rho R_2^2}{4\varepsilon_0}\left[1 + 2\ln(\frac{R_1}{R_2}) - \frac{R_1^2}{R_2^2}\right] - \frac{\rho}{2\varepsilon_0}[R_2^2 - R_1^2]\ln(R_1)$$

$$V_{03} = \frac{\rho R_2^2}{4\varepsilon_0}\left[1 + 2\ln(\frac{R_1}{R_2}) - \frac{R_1^2}{R_2^2}\right] - \frac{\rho R_2^2}{4\varepsilon_0}\left[1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}\right]2\ln(R_1)$$

$$V_{03} = \frac{\rho R_2^2}{4\varepsilon_0}\left[\left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}\right)(1 - 2\ln(R_1)) + 2\ln(\frac{R_1}{R_2})\right]$$

$$V_3(r) = \frac{-\rho}{2\varepsilon_0}[R_1^2 - R_2^2]\ln(r) + \frac{\rho R_2^2}{4\varepsilon_0}\left[\left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}\right)\left(1 - 2\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\right) + 2\ln(\frac{R_1}{R_2})\right]$$

$$V_3(r) = \frac{\rho R_2^2}{4\varepsilon_0}\left[\left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}\right)\left(1 + 2\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)\right) + 2\ln(\frac{R_1}{R_2})\right]$$

3. Courbes visualisants les variations $E(r)$ et $V(r)$
   a. L'allure de la courbe $E(r)$

Pour $r < R_2$:

$$E_1(r) = 0$$

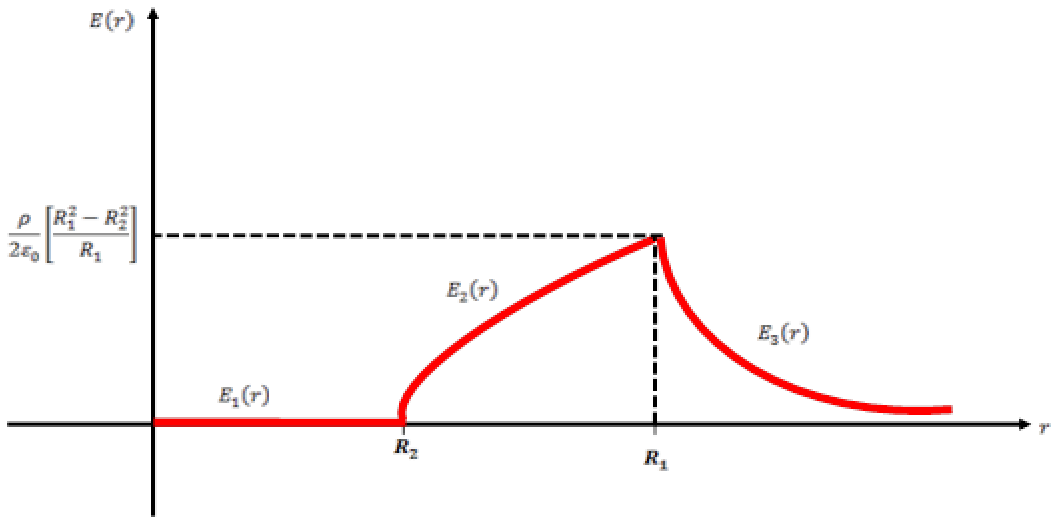
Pour $R_2 \leq r < R_1$:

$$E_2(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[r - \frac{R_2^2}{r}\right]$$

Pour $r \geq R_1$:

$$E_3(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[\frac{R_1^2 - R_2^2}{r}\right]$$

$$\begin{cases} E_2(r = R_2) = 0 \\ E_2(r = R_1) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 R_1}[R_1^2 - R_2^2] \end{cases} \qquad \begin{cases} E_3(r = R_1) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 R_1}[R_1^2 - R_2^2] \\ \lim_{r\to\infty} E_3(r) = 0 \end{cases}$$



   b. L'allure de la courbe $V(r)$

i) Pour $r \leq R_2$:

$$V_1(r) = 0$$

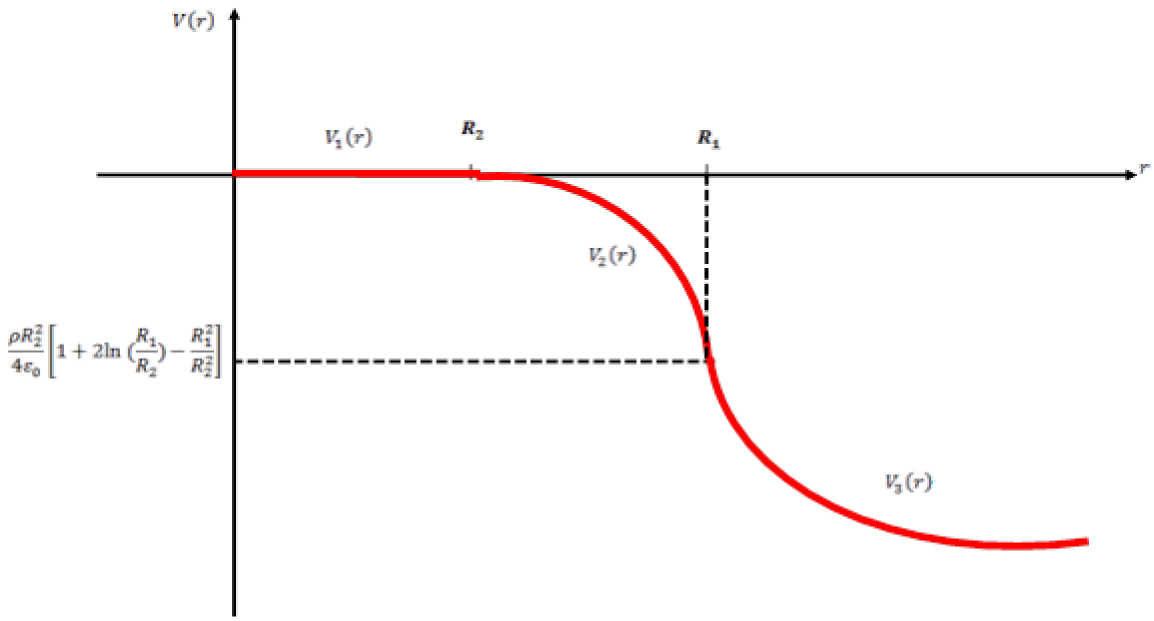
j) Pour $R_2 \leq r \leq R_1$:

$$V_2(r) = \frac{\rho R_2^2}{4\varepsilon_0}\left[1 + 2\ln(\frac{r}{R_2}) - \frac{r^2}{R_2^2}\right]$$

k) Pour $r \geq R_1$:

$$V_3(r) = \frac{\rho R_2^2}{4\varepsilon_0}\left[\left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}\right)\left(1 + 2\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)\right) + 2\ln(\frac{R_1}{R_2})\right]$$

$$
\begin{cases}
V_2(r = R_2) = 0 \\
V_2(r = R_1) = V_3(r = R_1) = \dfrac{\rho R_2^2}{4\varepsilon_0}\left[1 + 2\ln(\dfrac{R_1}{R_2}) - \dfrac{R_1^2}{R_2^2}\right] \\
\lim\limits_{r\to\infty} V_3(r) = -\infty, \qquad \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{V_3(r)}{r} = 0
\end{cases}
$$



4. L'expression du champ électrostatique
   a. Un tube cylindre de rayon R_2

i. Première méthode : conservation de la charge

La charge totale des deux cylindres coaxiaux avec une densité volumique ρ est :

$$Q_V = \pi h\rho[R_1^2 - R_2^2]$$

La charge totale dans le cas d'un tube cylindrique de rayon R_2 est :

$$Q_S = \iint dq = \iint \sigma dS = \iint \sigma R_2\, d\theta dz = \sigma R_2 2\pi h$$

Conservation de charges donne :

$$Q_V = Q_S$$

$$\pi h\rho[R_1^2 - R_2^2] = \sigma R_2 2\pi h$$

$$\rho[R_1^2 - R_2^2] = 2\sigma R_2$$

Or, le champ à l'extérieur est :

$$E_{ext}(r) = E_3(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[\frac{R_1^2 - R_2^2}{r}\right]$$

D'où,

$$E_{ext}(r) = \frac{R_2}{r\varepsilon_0}\sigma$$

et

$$E_{int}(r) = 0$$

ii. Deuxième méthode : Théorème de Gauss

$$\oiint_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \iint_{S_L} \vec{E}\,\overrightarrow{dS_L}$$

$$E(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi h r \varepsilon_0}, \qquad \text{avec,} \quad Q_S = \sigma R_2 2\pi h$$

$$E_{ext}(r) = \frac{R_2}{r\varepsilon_0}\sigma$$

Et toujours

$$E_{int}(r) = 0$$

b. Un conducteur cylindrique filiforme indéfini avec λ.

i. Première méthode : conservation de la charge

La charge totale d'un tube cylindrique est :

$$Q_S = \sigma R_2 2\pi h$$

La charge d'un conducteur filiforme est :

$$Q_l = \int \lambda dl = \lambda h$$

Conservation de charges donne :

$$Q_S = Q_l$$

$$\sigma R_2 2\pi h = \lambda h$$

$$\sigma R_2 = \frac{\lambda}{2\pi}$$

Or,

$$E_{ext}(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$$

ii. Deuxième méthode : théorème de Gauss

$$\oiint \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi h r \varepsilon_0} \quad \text{avec,} \quad Q_{int} = \lambda h$$

Finalement

$$E_{ext}(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$$

<u>Corrigé de l'exercice 4 :</u>

1. Le champ électrostatique en un point M situé entre les armatures :
   Théorème de Gauss :

$$\Phi = \oiint \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0},$$

avec, $\vec{E} = E(r)\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{dS_L} = dS_L\overrightarrow{e_r} = rd\theta dz\overrightarrow{e_r}$

Or,

$$\Phi = \oiint \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \leftrightarrow \iint E(r)dS_L = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$rE(r)\int_0^h dz\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

D’où,

$$E(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi rh\varepsilon_0}$$

2. La circulation de $\vec{E}(r)$

$$dC = \vec{E}(r).\overrightarrow{dl} = E(r)\overrightarrow{e_r}\overrightarrow{dl}$$

Avec, $dl = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + dz\overrightarrow{e_z}$

$$dC = E(r)dr \iff C = \int_1^2 dC \int_1^2 E(r)dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_{int}}{2\pi h\varepsilon_0}\frac{dr}{r}$$

Alors,

$$C = \frac{Q_{int}}{2\pi h\varepsilon_0}\,[\ln(R_2) - \ln(R_1)] = \frac{Q_{int}}{2\pi h\varepsilon_0}\ln(\frac{R_2}{R_1})$$

Or,

$$dC = -dV$$

$$C = -\int_1^2 dV = V_1 - V_2$$

3. La capacité du condensateur

La capacité d’un condensateur est donnée par :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

D’où,

$$V_1 - V_2 = \frac{Q_{int}}{2\pi h\varepsilon_0}\ln(\frac{R_2}{R_1})$$

Finalement,

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi h\varepsilon_0}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$$

<u>Corrigé de l’exercice 5 :</u>

1. Le champ électrostatique en un point M situé entre les armatures :

Théorème de Gauss :

$$\emptyset = \oiint \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Avec, $\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_r} + E_\theta(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\theta} + E_z(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{dS} = r^2\sin\theta\, d\theta d\varphi\overrightarrow{e_r}$

Or, la symétrie sphérique impose que : $\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_r}$, et le fait que le champ est invariant par rotation autour des axes (oz) et $(o\rho)$ donc il est indépendant de $(\theta\ et\ \varphi)$.

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\overrightarrow{e_r}.\text{ On dit que le champ est radial.}$$

Le flux du champ s'écrit :

$$\emptyset = \oiint \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \oiint E(r)r^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi = r^2 E(r) \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\emptyset = 4\pi r^2 E(r)$$

Donc le champ électrostatique créé en un point M situé entre les armatures est :

$$\vec{E}(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \vec{e}_r$$

2. La circulation du champ $\vec{E}(r)$

$$dC = \vec{E}(r).\overrightarrow{dr} = \frac{Q_{int}}{4\pi r^2 \varepsilon_0} dr$$

$$C = \int_{R_1}^{R_2} dC = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_{int}}{4\pi r^2 \varepsilon_0} dr = \frac{-Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right]$$

$$C = \frac{-Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}$$

3. La capacité du condensateur
   La capacité d'un condensateur est donnée par :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

Or,

$$dC = -dV$$

$$C = -\int_{R_1}^{R_2} dV = V_1 - V_2$$

D'où,

$$V_1 - V_2 = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

Finalement,

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

<u>Corrigé de l'exercice 6 :</u>

1. Le champ électrostatique créé par cette distribution de charge

   D'après la question 1 de l'exercice 5 on a :

$$\vec{E}(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \vec{e}_r$$

Avec Q_{int} est la charge à l'intérieur de la surface de Gauss.

- **Pour $r \leq R$:**

$$Q_{int} = \iiint \rho d\tau = \rho \int_0^r r^2 \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Avec r est le rayon de la sphère de Gauss.

$$Q_{int} = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$$

D'où,

$$E_{int}(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

- **Pour $\boldsymbol{r} > R$:**

$$Q_{int} = \iiint \rho d\tau = \rho \int_0^R r^2 \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Avec r est le rayon de la sphère de Gauss.

$$Q_{int} = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$$

D'où,

$$E_{ext}(r) = \frac{\rho R^3}{3r^2\varepsilon_0}$$

2. Le potentiel électrostatique

On a : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V \quad \Longrightarrow \quad E(r) = -\frac{dV}{dr} \quad \Leftrightarrow \quad V(r) = -\int E(r)dr$

- **Pour $\boldsymbol{r} > R$:**

$$V_{ext}(r) = -\int E_{ext}(r)dr = -\int \frac{\rho R^3}{3r^2\varepsilon_0} dr = \frac{\rho R^3}{3r\varepsilon_0} + V_{oe}$$

Le potentiel est nul à l'infini c-à-d : quand $r \to +\infty$, $V_{ext}(r) \to 0 \quad \Longrightarrow \quad V_{oe} = 0$
D'où

$$V_{ext}(r) = \frac{\rho R^3}{3r\varepsilon_0}$$

- **Pour $\boldsymbol{r} \leq \boldsymbol{R}$:**

$$V_{int}(r) = -\int E_{int}(r)dr = -\int \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + V_{oi}$$

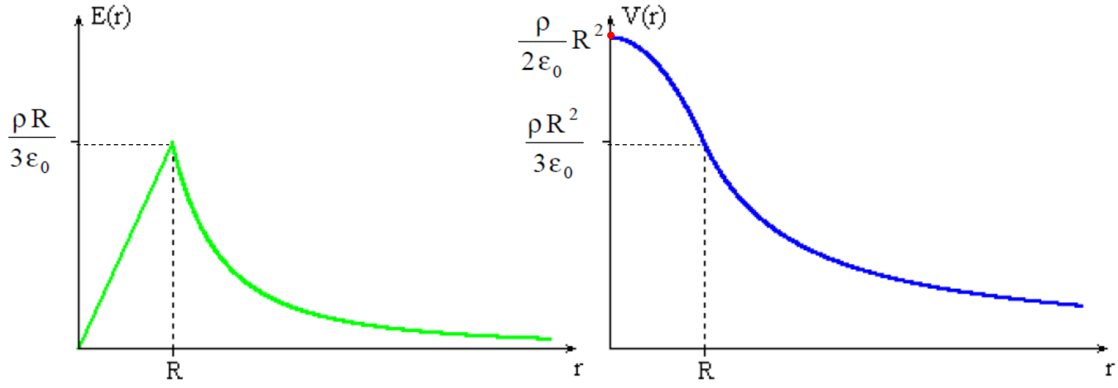
Le potentiel est continu en $r = R$, alors, $V_{int}(r = R) = V_{ext}(r = R)$
D'où, $\frac{-\rho R^2}{6\varepsilon_0} + V_{oi} = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad V_{oi} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$
Finalement :

$$V_{int}(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}[3R^2 - r^2]$$

3. Les allures du champ et du potentiel

- Le champ : $\begin{cases} E_{int}(r=0) = 0, \quad E_{int}(r=R) = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0} \\ E_{ext}(r=R) = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}, \quad E_{ext}(r \to +\infty) \to 0 \end{cases}$

- Le potentiel : $\begin{cases} V_{int}(r=0) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}, & V_{int}(r=R) = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} \\ V_{ext}(r=R) = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}, & V_{ext}(r \to +\infty) = 0 \end{cases}$



4. L'énergie électrostatique de la sphère

$$W = \frac{1}{2}\iiint \rho V d\tau = \frac{1}{2}\iiint \rho V r^2 \text{ dr} \sin\theta \, d\theta d\varphi$$

$$W = 2\pi \int_0^{+\infty} \rho V r^2 \, dr$$

$$W = 2\pi \int_0^R \rho V_{int} r^2 \, dr = 2\pi \int_0^R \rho \frac{\rho}{6\varepsilon_0}[3R^2 - r^2] r^2 \, dr$$

$$W = \frac{\pi\rho^2}{3\varepsilon_0} \int_0^R [3r^2R^2 - r^4] \, dr = \frac{\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\left[R^2 r^3 - \frac{r^5}{5}\right]_0^R$$

Finalement,

$$W = \frac{4\pi\rho^2}{15\varepsilon_0} R^5$$